26/10/2015

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = a$, τότε • αν $a\neq 0$, τότε η σύγκλιση είναι ακριβώς p τάξης

για $p=1$ πρέπει $|a|<1$ • $a=0$ η σύγκλιση είναι μεγαλύτερης τάξης από p

Έστω $\varphi\in C^1[a,b]$ τότε από Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε $|x_{n+1}-x^*| = |\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|$
$= |\varphi'(\xi)(x_n-x^*)| = |\varphi'(\xi)|\,|x_n-x^*|$, ξ μεταξύ x_n και x^*

$\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = f'(\xi)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \lim_{n\to\infty} f'(\xi) = \varphi'(x^*)$

Αν $|\varphi'(x^*)| \neq 0$ και $|\varphi'(x^*)|<1$, τότε η σύγκλιση είναι γραμμική ή τάξης ακριβώς 1

Αν $\varphi'(x^*)=0$ τότε η σύγκλιση είναι τάξης μεγαλύτερης του 1

Για να πετύχουμε τάξη σύγκλισης μεγαλύτερη του 1, πρέπει να ψάξουμε για φ τ.ω $\varphi'(x^*)=0$

π.χ $f(x)=x^3-x+1$. Θέλω $f(x)=0 \Leftrightarrow x=x^3+1 : \varphi(x)=x^3+1$

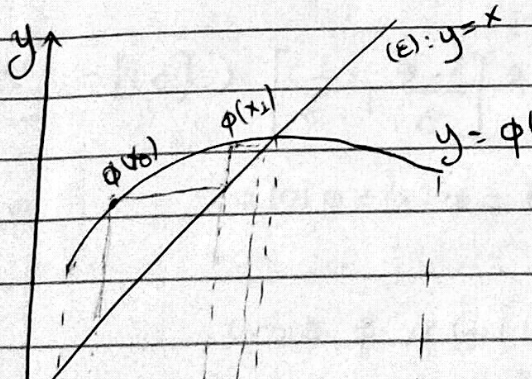
$\Leftrightarrow 2x^3-2x+2=0 \Leftrightarrow x=2x^3-x+2 : \varphi(x)=2x^3-x+2$

$\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} : \varphi(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

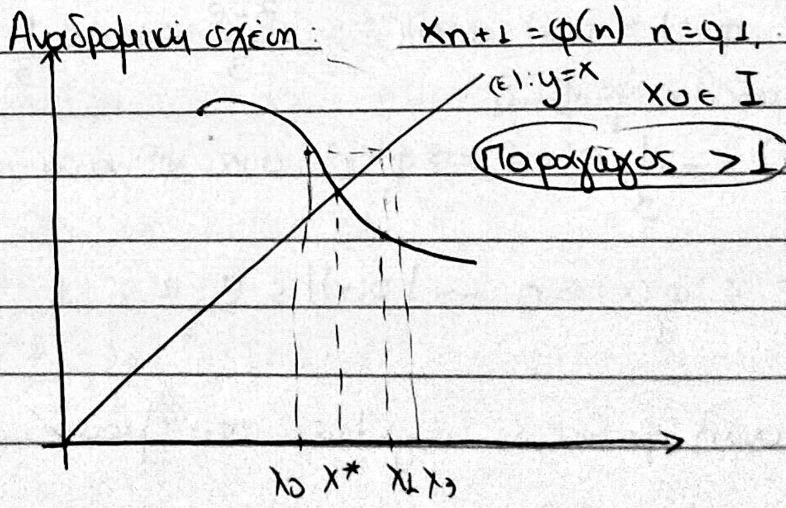
$\boxed{\text{Αυτές είναι αναδιατάξεις}}$ Δεν ξέρουμε αν συγκλίνουν

$x=\varphi(x)$

Αναδρομική σχέση: $x_{n+1}=\varphi(n)$ $n=0,1,$ $x_0\in I$



Παράγωγος <1
Σύγκλιση



Παράγωγος >1

απόκλιση

ΑΣΚΗΣΗ 28 (Από βιβλίο Ακριβή - Δουγάλη)
Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, n=0,1,2,\dots$ συγκλίνει και το όριό του βρίσκεται στο $[0,1]$

$\phi: [0,1] \to \mathbb{R}$, όπου $\phi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$\phi': (0,1) \to \mathbb{R}$, όπου $\phi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} > 0 \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow$ η ϕ είναι αύξουσα
$\phi(0) \le \phi(x) \le \phi(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \phi(x) \le \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow \phi(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \subset [0,1]$
άρα καλά ορισμένη
$\phi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$ αύξουσα (παίρνουμε $\phi''(x)$ και βλέπουμε ότι είναι θετική)
επομένως $\phi'(0) \le \phi'(x) \le \phi'(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \phi'(x) \le \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$
$|\phi'(x)| < 1$
άρα η ϕ είναι συστολή. Η ϕ συγκλίνει $\forall x_0 [0,1]$ στο μοναδικό $x^* \in [0,1]$
ΚΑΛΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ + ΣΥΣΤΟΛΗ $\Leftrightarrow$ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 29 (-//-)
Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ που δίνεται απ' τον τύπο $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$ συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο $[0,1]$
Λύση: $\phi: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\phi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x)$ $\phi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x) \le 0 \Rightarrow$ η ϕ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$

$$\phi(1) \le \phi(x) \le \phi(0) \Leftrightarrow \frac{3-e}{3} \le \phi(x) \le \frac{1}{3} \Rightarrow \phi(x) \in \left[\frac{3-e}{3}, \frac{1}{3}\right] \subset [0,1] \Rightarrow$$

Η ϕ καλά ορισμένη
$\phi''(x) = -\frac{1}{3} e^x < 0 \Rightarrow \phi'(x)$ είναι φθίνουσα $\Rightarrow \phi'(1) \le \phi'(x) \le \phi'(0) \Leftrightarrow$

$\frac{1-e}{3} \le \phi'(x) \le 0 \Rightarrow |\phi'(x)| \le \frac{e-1}{3} < 1 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$ η ϕ συστολή

Η επαναλ. μέθοδος συγκλίνει στο μοναδ. σταθ. σημείο $x^* [0,1] \ \forall x_0 \in [0,1]$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}\left|x_n^3 - \frac{1}{8}\right|$, $n \in \mathbb{N}_0$ συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x - \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| = 0$, που βρίσκεται στο $[0,1]$

~~Παρατηρούμε~~

Παρατηρούμε ότι $\varphi \notin C^1[0,1]$, δεν ορίζεται η παράγωγος στο $x = \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι η φ έχει 2 τοπικά μέγιστα στα άκρα του διαστήματος και ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$,

$\varphi(\frac{1}{2}) = 0$, $\varphi(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$, $\varphi(1) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{12} \Rightarrow 0 \le \varphi(x) \le \frac{7}{32} \Rightarrow$

$\varphi(x) \in [0, \frac{7}{32}] \subset [0,1] \Rightarrow$ καλά ορισμένη

Έστω $x, y \in [0,1]$: $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| - \frac{1}{4}\left|y^3 - \frac{1}{8}\right|\right| \le \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8} - \left(y^3 - \frac{1}{8}\right)\right|$

Για w, z $\big||w| - |z|\big| \le |w - z|$ Θεωρώ $w = w - z + z$ τότε $|w| = |w - z + z| \le |w - z| + |z|$

$\Leftrightarrow |w| - |z| \le |w - z|$

$\Leftrightarrow |z| - |w| \le |z - w|$

$\Rightarrow \big||w| - |z|\big| \le |w - z|$

$\rightarrow = \frac{1}{4}|x^3 - y^3| = \frac{1}{4}|(x^2 + xy + y^2)(x - y)| = \frac{1}{4}(x^2 + xy + y^2)|x - y| \le \frac{3}{4}|x - y|$

$\forall x, y \in [0,1] \Rightarrow$ η φ είναι συστολή επομένως συγκλίνει (αφού και καλά ορισμένη). Επομένως, συγκλίνει στη μοναδική ρίζα x^* της $f(x) = 0$ στο $[0,1]$

ΑΣΚΗΣΗ 2 10 (-11-)

$x_0 \in [0,1]$. Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ $x_{n+1} = \frac{1}{6}\left(3 + 4x_n^2 - e^{x_n}\right)$ $n \in \mathbb{N}_0$. Αποδείξτε ότι συγκλίνει και ότι το όριό της x^* βρίσκεται στο $[0,1]$. Αποδείξτε επίσης ότι $|x_n - x^*| \le \frac{a^n}{1-a}|x_1 - x_0|$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a = \frac{8-e}{6}$

$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{6}\left(3 + 4x^2 - e^x\right)$ $0 \le \frac{3-e}{6} = \frac{1}{6}\left(3 + \cancel{4 \cdot 0^2} - e\right) \le \varphi(x) \le \frac{1}{6}\left(3 + 4 \cdot 1 - e^0\right)$

$= 1 \Rightarrow \varphi: [0,1] \to [0,1]$ καλά ορισμένη

$\varphi'(x) = \frac{1}{6}\left(8x - e^x\right)$, $\varphi''(x) = \frac{1}{6}\left(8 - e^x\right) > 0 \Rightarrow \varphi'(x)$ αύξουσα $\varphi'(0) = -\frac{1}{6} \le \varphi'(x) \le \varphi'(1) = \frac{8-e}{6} \Rightarrow$

$|\varphi'(x)| \le \frac{8-e}{6} = a \Rightarrow$ η φ είναι συστολή και συγκλίνει $\forall x_0 \in [0,1]$ στο μοναδικό $x^* \in [0,1]$ με $L = \frac{8-e}{6} = a$